جامعة البعث — امتحان هندسة تفاضلية — الاسم : [illegible]

كلية العلوم — سنة رابعة رياضيات (تحليل) — الدرجة : 100

قسم الرياضيات — الفصل الثاني ٢٠١٤ - ٢٠١٥ — الفترة : ٩ - ١٠,٣٠

السؤال الأول (50 درجة)

ليكن السطح S المعطى بالمعادلة المتجهة $R(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$ والمطلوب :

١) ادرس طبيعة نقاط السطح .

٢) حدد الخطوط الإحداثية على السطح والخطوط المقاربة عليه .

٣) أوجد التقوس الكلي والتقوس الوسطي على السطح في نقطة المبدأ $(u,v)=(0,0)$

٤) أوجد طول المنحني الاحداثي $0\le t\le 1$, $u=t$, $v=\cos t$ على السطح S ثم أثبت أنه منحن جيوديزي ومنحن مستو (واقع في مستو) .

السؤال الثاني (35 درجة)

بفرض (r,θ) الاحداثيات القطبية في فضاء المستوي XOY . وليكن :

$T_1^1=1, T_2^1=x, T_1^2=y, T_2^2=0$ مركبات تنسور من النوع $\binom{1}{1}$ في النظام الاحداثي الديكارتي (x,y)

والمطلوب :

أ) أوجد T_{12} (خفض الدليل العلوي)، T^{12} (رفع الدليل السفلي) في النظام الاحداثي الديكارتي .

ب) مركبات التنسور المتري $\bar{g}_{ij}$ في النظام الاحداثي المنحني (r,θ) .

ت) أوجد مركبات التنسور $\bar{T}_j^i$ $(\bar{T}_1^1, \bar{T}_1^2, \bar{T}_2^1)$ في النظام (r,θ) .

ث) أوجد $\bar{T}_{1,1}^1$ في النظام الاحداثي المنحني (r,θ) .

السؤال الثالث (15 درجة)

عرف المنطوي التفاضلي ، ثم أثبت أن دائرة الوحدة $S^1=x^2+y^2=1$ هي منطو تفاضلي حدد بعده .

مع تمنياتي بالنجاح — مدرس المقرر أ. د. محسن شيحة

حمص في ٢ /٧ /٢٠١٥

جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان مقرر هندسة تفاضلية سنة رابعة رياضيات الفصل الأول ٢٠١٣-٢٠١٤	الاسم : الدرجة :100

السؤال الأول :(50 درجة)

ليكن السطح المابيلي المعرف بالمعادلة : $r(u,v)=(chu\cos v, chu\sin v, u)$ والمطلوب :

١) أوجد المنحنيات الاحداثية والمنحنيات المقاربة على السطح .

٢) ادرس طبيعة نقاط السطح وأوجد التقوسين الوسطي و الكلي في نقطة ما من السطح .

٣) أثبت أن المنحني $r(t)=(\cos t, \sin t, 0)$ هو منحني جيوديزي على السطح .

٤) أوجد مساحة المنطقة المحددة بـ $0\le v\le 1; 0\le u\le 1$ الواقعة على السطح .

٥) أوجد تقوس المنحني $r(t)=(cht, 0, t)$ الواقع على السطح في نقطة ما منه .

السؤال الثاني : (35 درجة)

ليكن (ρ,φ,θ) النظام الاحداثي الكروي والمطلوب :

١) أوجد طول المنحني المعطى بـ $r(t)=(\rho=t, \varphi=\arcsin 1/t, \theta=\sqrt{t^2-1}); 1\le t\le 2$

٢) ليكن T^i_{jk} تنسورا من النوع $\binom{1}{2}$ مركباته معطاة في هذا النظام بالشكل :

$$T^1_{11}=T^2_{22}=T^3_{33}=\varphi$$

$$T^2_{11}=T^1_{22}=T^3_{11}=T^2_{33}=T^1_{33}=T^3_{22}=\rho$$

بقية المركبات متساوية وتساوي $\rho\sin\theta$ والمطلوب :

أ) أوجد التنسور U_j الناتج عن تقليص التنسور T^i_{jk} العلوي والسفلي الثاني .

ب) أوجد التنسور $T_{1,22}=g_{1\alpha}T^{\alpha}_{22}$

ت) أوجد التفاضل موافق التغير $T^1_{12,2}$ علما ان مركبات كريستوفل غير المعدومة اللازمة في هذه العملية هي $\Gamma^1_{22}=-\rho; \Gamma^2_{12}=1/\rho$.

السؤال الثالث : (15 درجة)

عرف المنطوي التفاضلي ، ثم أثبت أن دائرة الواحدة $S^1=x^2+y^2=1$ في المستوي هي منطو تفاضلي .

مع تمنياتي بالنجاح حمص في ٢٠١٤/٢/١٣	مدرس المقرر أ.د. محسن شيحة

نموذج حل لمقرر هندسة تفاضلية سنة ثالثة رياضيات للفصل الأول
كلية العلوم قسم الرياضيات

الجواب الأول

$r(u,v)=(\operatorname{ch}u\cos v,\ \operatorname{ch}u\sin v,\ u) \Rightarrow$

$r_u=(\operatorname{sh}u\cos v,\ \operatorname{sh}u\sin v,\ 1)$, $r_v=(-\operatorname{ch}u\sin v,\ \operatorname{ch}u\cos v,\ 0)$

$\Rightarrow E=(r_u)^2=1+\operatorname{sh}^2u=\operatorname{ch}^2u$, $F=r_u\cdot r_v=0$, $G=(r_v)^2=\operatorname{ch}^2u \Rightarrow$

$I=\operatorname{ch}^2u\,(du^2+dv^2)$

$r_{uu}=(\operatorname{ch}u\cos v,\ \operatorname{ch}u\sin v,0)$, $r_{uv}=(-\operatorname{sh}u\sin v,\ \operatorname{sh}u\cos v,0)$

$r_{vv}=(-\operatorname{ch}u\sin v,\ \operatorname{ch}u\cos v,0)$, $\vec n=\dfrac{r_u\times r_v}{|r_u\times r_v|}=\left(-\dfrac{\cos v}{\operatorname{ch}u},-\dfrac{\sin v}{\operatorname{ch}u},\dfrac{\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u}\right)$

$L=r_{uu}\cdot n=-1$, $M=0$, $N=1 \Rightarrow II=-du^2+dv^2$

1) المنحنيات u = ثابت هي منحنيات رئيسية لأن $F=M=0$ ... الانحناءات الرئيسية هي

$K=k_1\cdot k_2=\dfrac{-1}{\operatorname{ch}^4u}$ حيث $K_2=\dfrac{N}{G}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2u}$, $k_1=\dfrac{L}{E}=\dfrac{-1}{\operatorname{ch}^2u}$

$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0$

2) المنحنيات المقاربة: نضع $II=0$ $\Rightarrow du^2=dv^2$ $\Rightarrow u=\mp v+C$

تقاطع السطح والاسطوانة $\operatorname{ch}u=0$ ...

$LN-M^2=-1 \Rightarrow$

ℏ عوضنا في الناظم السابق كل v بـ t وكل u بـ 0

الانحناء الجيوديزي $K_g=K(n,r',r'')=\begin{vmatrix}-\cos t & -\sin t & 0\\ -\sin t & \cos t & 0\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=0$

4) $S=\int_0^1\!\!\int_0^1\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\int_0^1\!\!\int_0^1\operatorname{ch}^2u\,du\,dv=\frac{1}{2}\int(\operatorname{ch}2u+1)\,dv=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2u+\frac{u}{2}\right)dv=\frac{e^2-e^{-2}+4}{8}$

5) تقاطع الطرق (المستوي) والسطح ... محصل $t=u$, $v=\pi/2$

$r'(t)=(\ \operatorname{sh}t,\ 0,\ 1)$, $r''=(\ \operatorname{ch}t,\ 0,\ 0)\Rightarrow r'\times r''=(\ ,\operatorname{ch}t,0)$

$\Rightarrow K=\dfrac{|r'\times r''|}{|r'|^3}=\dfrac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{ch}^3t}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2t}$

الجواب الثاني

$\dfrac{d\rho}{dt}=1,\ \dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{-1/t^2}{\sqrt{1-(1/t)^2}}=\dfrac{-1}{t\sqrt{t^2-1}},\ \dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2t}{\sqrt{t^2-1}}$

$\Rightarrow ds^2=\left[1,\dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}},\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}\right]\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&t^2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\\ \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\end{bmatrix}=\dfrac{2t^2}{t^2-1}$

نقسم كل المركبات على $|r_u\times r_v|$ بعد شكل ضرب مختلط سهل

وهذه طول القوس يساوي $\sqrt{6}$

$$\ell = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\, dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{t^2-1}} = \left[\sqrt{2(t^2-1)}\right]_1^2 = \sqrt{6}$$

(أ)

$$U_1 = T_{1\,1}^{1} + T_{1\,2}^{2} + T_{1\,3}^{3} = \varphi + 2(\rho \sin\theta)$$

$$U_2 = T_{2\,1}^{1} + T_{2\,2}^{2} + T_{2\,3}^{3} = 2\rho\sin\theta + \varphi$$

$$U_3 = T_{3\,1}^{1} + T_{3\,2}^{2} + T_{3\,3}^{3} = 2\rho\sin(\varphi) + \theta\varphi$$

(ب)

$$T_{(31)}^{2} = \frac{1}{2}(T_{13}^{2} + T_{31}^{2}) = T_{13}^{2} = \rho\sin\theta$$

$$T_{[31]}^{3} = \frac{1}{2}[T_{21}^{3} - T_{12}^{3}] = 0$$

(ج)
$$T_{12,2}^{1} = \partial_2 T_{12}^{1} + T_{12}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 2}^{1} - T_{\alpha 2}^{1}\Gamma_{12}^{\alpha} - T_{1\alpha}^{1}\Gamma_{22}^{\alpha} =$$

$$= \partial_\varphi(\rho\sin\theta) + T_{12}^{1}\Gamma_{12}^{1} + T_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1} + T_{12}^{3}\Gamma_{32}^{1} - T_{12}^{1}\Gamma_{12}^{1} - T_{22}^{1}\Gamma_{12}^{2} -$$

$$- T_{32}^{1}\Gamma_{12}^{3} - T_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1} - T_{12}^{1}\Gamma_{22}^{2} - T_{13}^{1}\Gamma_{22}^{3}$$

$$= 0 + \rho\sin\theta(0) + \sin\theta(-\rho) + \rho\sin\theta(0) - \rho\sin\theta(0) - \rho/\rho$$

$$- \rho\sin\theta(0) - \varphi\times -\rho - \rho\sin\theta(0) - \rho\sin\theta(0) = -(1+\sin\theta) - \varphi\rho$$

(د)
$$T_{1,22} = g_{1\alpha}T_{22}^{\alpha} = g_{11}T_{22}^{1} + g_{12}T_{22}^{2} + g_{13}T_{22}^{3} = \rho T_{22}^{1} = \rho\cdot\rho = \rho^2$$

الجواب الثالث

أ - المنطوى التفاضلي هو منطوى تبولوجي منفصول M^n تحقق
1) توجد لـ M^n مجموعة من الأطلس $A = \{(U_\alpha, X_\alpha), \alpha\in I\}$ بحيث
- من أجل كل $\alpha \in I$ فإن A مجموعة $M^n = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ و $X_\alpha(U_\alpha)$ مفتوحة في $\mathbb{R}^n$.
2) من أجل أي خارطتين (U, X) و (V, Y) من A حيث $U\cap V \neq \phi$ فإن التطبيق $X\circ Y^{-1}$ تفاضلي
3) الأطلس A أعظمي في M^n
ب - نفرض $S^1 = x^2+y^2 = 1$ دائرة الواحدة في $\mathbb{R}^2$ ، $U = S^1 \setminus \{P_0\}$ و $V = S^1 \setminus \{P_0\}$ ... من الواضح أن
$U \cup V = S^1$ ونفرض $\phi(P), P\in U$ هي $\sphericalangle(\vec{OP_0}, \vec{OX})$ وهو تنتمي إلى $]-\pi, \pi[$
وإن $q \in V$ ، $\psi q = \sphericalangle(\vec{Oq}, \vec{OP_0})$ إن ϕ و ψ تقابليان مستمران ومشتقتهما ((V,ψ
الأطلس A = خارطتان في S^1 ، ونفرض $W = U\cap V$ فإن

$$\psi\circ\phi^{-1}(t) = \begin{cases} t+\pi & ; t\in\,]-\pi, 0[\\ t-\pi & \; t\in\,]0, \pi[\end{cases}$$

هو تطبيق أملس لذا فإن S^1 هو منطوى تفاضلي ذو البعد 1.

د. محسن شيخة

جامعة البعث	امتحان مقرر هندسة تفاضلية	الاسم :
كلية العلوم	سنة رابعة رياضيات	الدرجة :100
قسم الرياضيات	الفصل الثاني ٢٠١٣-٢٠١٤	المدة (٩- ١٠,٣٠) .

السؤال الأول: (50 درجة)

ليكن السطح المعرف بالمعادلة : $r(u,v) = (u, v, u^2 - 2v^2)$ والمطلوب :

١) أثبت أن السطح نظامي ثم أوجد معادلة المستوي المماس لهذا السطح في النقطة $p(0,0)$ منه.

٢) أوجد المنحنيات الاحداثيية والمنحنيات المقاربة على السطح .

٣) ادرس طبيعة نقاط السطح وأوجد التقوسين الوسطي و الكلي في النقطة $p(0,0)$.

٤) أثبت أن المنحني $r(t) = (t, t/\sqrt{2}, 0)$ هو منحني جيوديزي على السطح .

٥) أوجد تقوس المنحني $r(t) = (t, t, -t^2)$ الواقع على السطح في نقطة ما منه .

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً: أثبت أن رموز كريستوفل من الوع الأول تعطى بدلالة التنسور المتري g_{ij} بالعلاقة:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$$

ثانياً: ليكن (ρ, θ, z) النظام الاحداثي الاسطواني والمطلوب :

١) اكتب صيغة التنسور المتري في هذا النظام ، ثم أوجد بدلالته طول المنحني المعطى بالمعادلة . $r(t) = (\rho = a, t, z = bt); 0 \le t \le c$

٢) ليكن T^{i}_{jk} تنسورا من النوع $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ مركباته معطاة في هذا النظام بالشكل :

$$T^{1}_{11} = T^{2}_{22} = T^{3}_{33} = z$$

$$T^{2}_{11} = T^{1}_{22} = T^{3}_{11} = T^{2}_{33} = T^{1}_{33} = T^{3}_{22} = \rho$$

بقية المركبات متساوية وتساوي $\rho \sin\theta$ والمطلوب :

أ) أوجد التنسور U_j الناتج عن تقليص التنسور T^{i}_{jk} العلوي والسفلي الثاني .

ب) أوجد التنسور $T_{1,22} = g_{1\alpha} T^{\alpha}_{22}$.

مدرس المقرر

أ.د. محسن شيحة

مع تمنياتي بالنجاح

حمص في ٢٠١٤/٦/٢٤

21

الجواب الأول
50 درجة

$r_u = (1, 0, 2u), r_v = (0, 1, -4v)$

$E = (r_u)^2 = 1 + 4u^2, \quad F = r_u \cdot r_v = -8uv$

$G = (r_v)^2 = 1 + 16v^2 \Rightarrow EG - F^2 = 1 + 4u^2 + 16v^2$

١) منتظم $r \in C^\infty$ و $r_u \times r_v \neq 0$

$r_u \times r_v = (-2u, 4v, 1) \neq 0 \ \forall (u,v) \in D$

أي $(0,0)$ فإن $r_u \times r_v$ السطح نظامي ومعادلة المستوي المماس

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

٢) المنحنيات الاحداثية نعوض بمعادلة السطح $u = c$ ومنه:

منحني هو قطع مكافئ نحو الجهة السالبة

$Z = C - 2v^2 = C - 2y^2 \Rightarrow$

منحني $v = c$ هو

$Z = x^2 - C$

منحني قطع مكافئ نحو السينات الموجبة.

المنحني المطلوب نجد L، M، N حيث:

$r_{uu} = (0, 0, 2)$

$r_{uv} = 0, \quad r_{vv} = (0, 0, -4) \Rightarrow \vec{n}$

$$L = r_{uu} \cdot n = (0,0,2) \cdot \frac{(-2u, 4v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 16v^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 16v^2}}$$

$$M = r_{uv} \cdot n = 0, \quad N = \frac{-4}{\sqrt{1 + 4u^2 + 16v^2}}$$

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 16v^2}}(2du^2 - 4dv^2)$$

~~طبيعة نقاط السطح~~ المنحنيات المقاربة من حل المعادلة

$II = 0$ ومنه

$\Rightarrow du^2 - 2dv^2 = 0 \Rightarrow u = \mp\sqrt{2}\,v$

٣) طبيعة نقاط السطح

الشكل الثاني $LN - M^2$ وهي

$LN - M^2 = \frac{-8}{\sqrt{1 + 4u^2 + 16v^2}} < 0$

الانحناء الرئيسي $K_1 = \frac{L}{E} = 2, \quad K_2 = -2 \Rightarrow K = K_1 \cdot K_2 = -4$

التكاملي $H = K_1 + K_2 / 2 = 0$

حيث $M = 0$ عندما $F = 0$ $u = 0$ $v = 0$

أي النقطة $P(0,0)$

٤) بما أن التقوس الجيوديسي يعطى بالعلاقة

$g = (n, r', r'')$ ، $r' = (1, 1, \sqrt{2}, 0)$ ، $r'' = (0, 2, 0) \Rightarrow K_g = 0$

$K = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} = \frac{|-2i + 2j|}{\sqrt{1+2t}} =$ سابقاً المنحني جيوديسي

$K = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+2t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2t^2}}$

$g_{kl} = \langle \frac{\partial r}{\partial x^k}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \rangle$, $\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \rangle = g_{kl}\Gamma^k_{ij} = \Gamma_{l,ij}$ الجواب ليس كاملاً
50 درجة

$\Rightarrow g_{kl,m} = \langle \frac{\partial r}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^l \partial x^m} \rangle + \langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^k \partial x^m}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \rangle = g_{kl,m}$

$\Gamma_{i,jq} + \Gamma_{j,iq} = g_{ij,q} \Rightarrow \Gamma_{j,qi} + \Gamma_{q,ji} = g_{jq,i} \Rightarrow \Gamma_{q,ij} + \Gamma_{i,qj} = g_{qi,j}$
بجمع الأولى والثانية وطرح الثالثة نجد أن

$\Gamma_{j,iq} = \frac{1}{2}(g_{ij,q} + g_{jq,i} - g_{iq,j})$

(c

$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $L = \int_0^c \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dt =$

$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = [0, 1, b] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = a^2 + b^2 \Rightarrow L = \int_0^c \sqrt{a^2+b^2}\, d = c\sqrt{a^2+b^2}$

$U_1 = T^1_{11} + T^2_{12} + T^3_{13} = z + 2\rho\sin\theta$

$U_2 = T^1_{21} + T^2_{22} + T^3_{23} = 2\rho\sin\theta$

$U_3 = T^1_{31} + T^2_{32} + T^3_{33} = 2\rho\sin\theta$

$T_{1,22} = g_{11}T^1_{22} + g_{12}T^2_{22} + g_{13}T^3_{22} = \rho + 0 + 0 = \rho$

د. [signature] انتهت الأجوبة

٢٤/٦/٢٠١٤

جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان مقرر هندسة تفاضلية سنة رابعة رياضيات الدورة التكميلة ٢٠١٤	الاسم : الدرجة :100 الفترة: ( )

السؤال الأول :(60 درجة)

ليكن السطح المعرف بالمعادلة

$r(u,v)=(\sqrt{1-u^2}\cos v,\sqrt{1-u^2}\sin v,u);-1<u<+1;-\pi<v<+\pi$ والمطلوب :

١) ماذا يمثل هذا السطح ؟ أثبت أن السطح نظامي .

٢) أوجد المنحنيات الاحداثيية والمنحنيات المقاربة على السطح .

٣) ادرس طبيعة نقاط السطح وأوجد التقوسين الوسطي و الكلي في نقطة ما منه .

٤) أوجد طول المنحني المعطى بالمعادلتين الوسيطتين $u = \frac{t}{4}$ حيث $0 \le t \le 1/2$

٥) أوجد تقوس والتفاف المنحني الاحداثي $u = const$ في نقطة ما منه .

السؤال الثاني : (40 درجة)

١) ا بفرض T_i مركبات تنسور من النوع $\binom{0}{1}$ أثبت أن $S_{ij}=T_iT_j-T_jT_i$ هي مركبات تنسور متناظر تخالفيا من النوع $\binom{0}{2}$.

٢) بفرض أن النظام الاحداثي $(\bar{x},\bar{y})$ يرتبط بالنظام الاحداثي الديكارتي (x,y) بالعلاقة: $x=(\bar{x})^2, y=\bar{y}$

فاذا علمت أن مركبات التنسور T^i في النظام الاحداثي (x,y) هي : $T^1=xy, T^2=\frac{x}{y}$

أوجد مركبات التنسور T^i في النظام الاحداثي $(\bar{x},\bar{y})$.

٣) بفرض T^i_{jk} تنسور من النوع $\binom{1}{2}$ مركباته هي :

$T^1_{11}=x+y^2, T^1_{21}=x+y, T^1_{12}=xy, T^1_{22}=1, T^2_{11}=y+x^2, T^2_{12}=x-y, T^2_{21}=\frac{x}{y}, T^2_{22}=0$

والمطلوب أوجد التنسور الناتج عن تقليص التنسور T^i_{jk} بدليليه العلوي والسفلي الثاني ، ثم أوجد مركبات التنسور $T^i_{[jk]}$.

مع تمنياتي بالنجاح
حمص في ٢٠١٤/٨/٢٤

مدرس المقرر
أ.د. محسن شيحة

Scanned by CamScanner

سلم تصحيح سنة رابعة
هندسة تفاضلية رياضيات
الدورة التكميلية

3-3-2 نتائج:

أ)- يمكننا الانتقال من الإحداثيات الأسطوانية (ρ,θ,z) لنقطة ما من الفضاء الثلاثي، إلى الإحداثيات الكروية لتلك النقطة، وفق العلاقات الآتية:

$$r=\sqrt{\rho^2+z^2}\ ,\ \theta=\theta,\ \varphi=\text{arctg}\,\frac{\rho}{z} \qquad (9\text{-}2)$$

ب)- يمكن الانتقال من الإحداثيات الكروية (r,θ,φ) لنقطة ما من الفضاء الثلاثي، إلى الإحداثيات الأسطوانية لتلك النقطة، وفق العلاقات الآتية:

$$\rho=r\sin\varphi\ ,\ \theta=\theta\ ,\ z=r\cos\varphi \qquad (10\text{-}2)$$

الجدول الآتي، ينقلنا من إحداثيات ما لنقطة M، إلى إحداثيات أخرى:

		الإحداثيات الديكارتية x,y,z	الإحداثيات الأسطوانية ρ,θ,z	الإحداثيات الكروية r,θ,φ
الإحداثيات الديكارتية	$x=$ $y=$ $z=$		$=\rho\cos\theta$ $=\rho\sin\theta$ $=z$	$=r\sin\varphi\cos\theta$ $=r\sin\varphi\sin\theta$ $=r\cos\varphi$
الإحداثيات الأسطوانية	$\rho=$ $\theta=$ $z=$	$=\sqrt{x^2+y^2}$ $=\text{arctg}\,\frac{y}{x}$ $=z$		$=r\sin\varphi$ $=\theta$ $=r\cos\varphi$
الإحداثيات الكروية	$r=$ $\theta=$ $\varphi=$	$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $=\text{arctg}\,\frac{y}{x}$ $=\text{arctg}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$=\sqrt{\rho^2+z^2}$ $=\theta$ $=\text{arctg}\,\frac{\rho}{z}$	

نموذج حلول لمقرر هندسة تفاضلية سنة رابعة رياضيات
جامعة البعث كلية العلوم للدورة التكميلية ٢٠١٤

الجواب الأول

لدينا

$$r(u,v) = \left(\sqrt{1-u^2}\cos v, \sqrt{1-u^2}\sin v, u\right)$$

$$r_u = \left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\cos v, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\sin v, 1\right)$$

$$r_v = \left(-\sqrt{1-u^2}\sin v, \sqrt{1-u^2}\cos v, 0\right)$$

$$r_{uv} = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\sin v, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\cos v, 0\right)$$

$$r_{uu} = \left(\frac{-1}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}}\cos v, -\frac{1}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}}\sin v, 0\right)$$

$$r_{vv} = \left(-\sqrt{1-u^2}\cos v, -\sqrt{1-u^2}\sin v, 0\right)$$

$$E = \frac{u^2}{1-u^2} + 1 = \frac{u^2+(1-u^2)}{1-u^2} = \frac{1}{1-u^2}$$

$$F = r_u \cdot r_v = 0$$

$$G = r_v \cdot r_v = (1-u^2) \Rightarrow EG-F^2 = 1$$

1) إن هذا السطح يمثل سطح كرة لأن $x^2+y^2+z^2=1$

وإن السطح نظامي وذلك لأن $|r_u \times r_v| = 1 \neq 0$ ،

$\vec{n} =$ $\vec{n} = \left(-\sqrt{1-u^2}\cos v, -\sqrt{1-u^2}\sin v, -u\right)$

2) إن المنحني الإحداثي $u = const$ يمثل دائرة تقاطع السطح مع المستوي $z = c$ من معادلة مستوي يوازي ...

$v = const$ هي دوائر الطول للكرة.

لإيجاد المنحنيات المقاربة نضع $II = 0$. بمعنى إن

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = \frac{1}{1-u^2}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = 0, \quad N = r_{vv} \cdot n = (1-u^2)$$

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \frac{du^2}{1-u^2} + (1-u^2)\,dv^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{1-u^2} = \mp dv \Rightarrow v = \mp\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|$$

لو نضع $u = c$ فينتج: $\begin{cases} x = c_1\cos v \\ y = c_1\sin v \\ z = c \end{cases}$ بالتربيع والجمع $x^2+y^2 = c_1$ ...

ثم) لدراسة طبيعة نقاط السطح نحسب $LN-M^2 = 1 > 0$

وبالتالي نقاط السطح ناقصية والتقوسين العظيمي والصغيري يعطيان بالشكل :

$$K_1 = \frac{L}{E} = \frac{\frac{1}{1-u^2}}{\frac{1+}{1-u^2}} = 1 \quad , \quad K_2 = \frac{N}{G} = \frac{1-u^2}{1-u^2} = 1$$

$$\Rightarrow K = K_1 \cdot K_2 = 1 \quad , \quad H = \frac{K_1+K_2}{2} = \frac{1}{2}$$

ج)

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{1/2} \sqrt{EG-F^2}\, du = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\int_0^{1/2} du \right] = \frac{\pi}{4}$$

ه) المنحني u=const هو دائرة لذلك فإن تقوسها $K = 1/\sqrt{1-c^2}$ والتفافها معدوم لأنها منحني مستوٍ.

الجواب الثالث

ج) $S_{ij} = [T_i T_j - T_j T_i] \Rightarrow S_{ji} = [T_j T_i - T_i T_j] = -S_{ji}$ فهو متناظر تخالفياً

$$\bar{T}^1 = T^1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + T^2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = \frac{xy}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{y} 0 = \frac{\sqrt{x}}{2} y$$

٢)

$$\bar{T}^2 = T^1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + T^2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = (x \cdot y) \cdot 0 + \frac{x}{y} \cdot 1 = \frac{x}{y}$$

ه)

$$S_1 = T^\alpha_{1\alpha} = T^1_{11} + T^2_{12} = (x^2 y^2 + x - y) = (2x y + y^2)$$

$$S_2 = T^\alpha_{2\alpha} = T^1_{21} + T^2_{22} = (x+y)$$

$$U^i_{jk} = T^i_{[jk]} = T^i_{jk} - T^i_{jk} \Rightarrow U^1_{11} = \frac{1}{2}(T^1_{11} - T^1_{11}) = 0$$

$$U^1_{12} = \frac{1}{2}(T^1_{12} - T^1_{21}) = \frac{1}{2}(xy - (x+y))$$

$$U^1_{21} = \frac{1}{2}(T^1_{21} - T^1_{12}) = \frac{1}{2}[(x+y) - (xy)] \quad , \quad U^2_{12} = \frac{1}{2}(T^2_{12} - T^2_{21}) = \frac{1}{2}((x-y) - \frac{x}{y})$$

$$U^2_{11} = \frac{1}{2}(T^2_{11} - T^2_{11}) = 0 \quad , \quad U^2_{22} = 0 \quad , \quad U^1_{22} = 0$$

$$U^2_{21} = -\frac{1}{2}[(x-y-\frac{x}{y}) \quad , \quad U^2_{22} = 0$$

انتهت الأجوبة

د. [signature]

وزارة التعليم العالي جامعة البعث كلية العلوم	امتحان مقرر هندسة التفاضلية سنة رابعة (تحليل) الفصل الأول (٢٠١٢-٢٠١٣)	الاسم : الرقم : الفترة :

السؤال الأول (45 درجة)

١) عرف السطح البسيط ، خط التقوس على سطح، المنحني الجيوديزي على سطح .

٢) ليكن السطح S المعطى بالدالة المتجهة : $\vec{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \ln u): u>0$

والمطلوب :

أ) ادرس طبيعة الخطوط الاحداثية على السطح S وطبيعة نقاطه.

ب) اوجد الخوط المقاربة على السطح S والتقوسان الأساسيان له .

ت) أوجد التقوس الناظمي والتقوس الجيوديزي للمنحني ξ المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين :

$u=t, v=0$.

ث) أوجد الزاوية بين المنحني ξ الوارد في الطلب السابق والمنحني الاحداثي ذي الوسيط v .

السؤال الثاني (40 درجة)

١) أثبت أن عبارة مركبات كريستوفل من النوع الأول $\Gamma_{i,jk}$ تكتب بدلالة التنسور المتري

g_{ij} على النحو : $\Gamma_{i,jk}=\frac{1}{2}(\partial_j g_{ik}+\partial_k g_{ij}-\partial_i g_{jk})$.

٢) بفرض (r,θ) الاحداثيات القطبية في فضاء المستوي XOY .وليكن :

$T_1^1=1, T_2^1=x, T_1^2=y, T_2^2=0$ مركبات تنسور من النوع $\binom{1}{1}$ في النظام الاحداثي (x,y)

والمطلوب :

أ) أوجد مركبات التنسور T في النظام (r,θ) .

ب) أوجد مركبات كريستوفل من النوعين الأول والثاني ،ثم أوجد $T_{1,2}^1=\nabla_2 T_1^1$. (المشتق موافق التغير)

ت) أوجد T_{12} ،(خفض الدليل العلوي)، T^{12} (رفع الدليل السفلي)

السؤال الثالث : (15 درجة)

١) عرف المنطوي التفاضلي – متجه المماس لمنطو في نقطة منه .

٢) أثبت أن كرة الواحدة $S^n\subseteq\Re^{n+1}$ المعرفة نقاطها $P(p_1,\dots\dots,p_{n+1})$ بالمعادلة :

$\sum_{i=1}^{n+1}(p_i)^2=1$ هي منطو تفاضلي من المرتبة n .

مدرس المقرر
د. محسن شيحة

مع تمنياتي بالتوفيق
حمص في /٢/ ٢٠١٣

جامعة البعث		امتحان هندسة تفاضلية		الاسم :
كلية العلوم		الفصل الثاني ٢٠١٢ -٢٠١٣		الدرجة: 100
قسم الرياضيات		سنة رابعة – رياضيات		المدة : ساعتان

السؤال الأول(50 درجة)

ليكن S سطحا معطى بالمعادلة : $r(u,v)=(u,v,uv)$. ومعرفا على النطاق $D\subseteq\mathbb{R}^2$ الذي مركزه نقطة الأصل (0,0) والمطلوب :

١) أوجد المنحنيات ذات الوسيط u ، والمنحنيات ذات الوسيط v .
٢) أوجد التقوس الوسطي وتقوس غوص للسطح في نقطة الأصل .
٣) أوجد المنحنيات المقاربة وادرس طبيعة نقط السطح
٤) بفرض أن $r(t)=(t,0,0)$ منحن واقع على السطح ، أثبت أن هذا المنحني جيوديزي، ثم احسب طول قوس هذا المنحني بين النطتين الموافقتين للوسيط $t=1, t=0$.

السؤال الثاني (35 درجة)

١) بفرض أن النظام الاحداثي $(\bar{x},\bar{y})$ يرتبط بالنظام الاحداثي الديكارتي (x,y) بالعلاقة: $x=(\bar{x})^2, y=\bar{y}$ والمطلوب:

أ) أوجد مركبات التنسور المتري g_{ij} ومركبات كريستوفل ، $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{1,11}$.

٢) اذا كانت $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ مركبات تنسور من النوع $T\binom{1}{1}$ ،

أ) أوجد التنسور الناتج عن تقلص $T\binom{1}{1}$ بدليليه العلوي والسفلي .
ب) بفرض $\zeta_k(2,1,1)$ مركبات متجه موافق التغير ، أوجد مركبات المتجه $\zeta_i T_k^i$.

السؤال الثالث (15 درجة)

عرف المنطوي التفاضلي الأملس ، متجه المماس لمنطو تفاضلي M^n في نقطة P منه .

مع تمنياتي بالنجاح		مدرس المقرر أ.د. محسن شيحة

حمص في ٨ /٧/ ٢٠١٣

جامعة البعث — امتحان هندسة تفاضلية — الاسم : خالد رحمال

كلية العلوم — سنة رابعة – رياضيات — الدرجة 1000

قسم الرياضيات — الدورة الإضافية (٢٠١٢ -٢٠١٣)

السؤال الأول (450 درجة)

ليكن S سطحا معطى بالمعادلة : $r(u,v)=(u-u^3/3+uv^2, v-v^3/3+vu^2, u^2-v^2)$. ومعرفا على النطاق $D\subseteq\mathbb{R}^2$ والمطلوب :

١) أوجد التقوسان الأساسيان و التقوس الوسطي وتقوس غوص للسطح .

٢) أوجد المنحنيات المقاربة وأدرس طبيعة نقاط السطح .

٣) بفرض أن $r(t)=(u=t, v=0)$ منحن واقع على السطح ، أوجد طول هذا المنحني الواصل بين النقطتين الموافقتين لقيم الوسيط $t=0$ و $t=1$.

٤) أوجد مساحة المنطقة الواقعة على السطح المحددة كمايلي $D=\{(u,v); 0\le u\le 1; 0\le v\le 1\}$

السؤال الثاني (400 درجة)

١) ا بفرض T_i مركبات تنسور من النوع $\binom{0}{1}$ أثبت أن $S_{ij}=T_iT_j-T_jT_i$ هي مركبات تنسور متناظر تخالفيا من النوع $\binom{0}{2}$.

٢) بفرض أن النظام الاحداثي $(\bar{x},\bar{y})$ يرتبط بالنظام الاحداثي الديكارتي (x,y) بالعلاقة: $x=(\bar{x})^2, y=\bar{y}$

فاذا علمت أن مركبات التنسور T^i في النظام الاحداثي (x,y) هي : $T^1=xy, T^2=\dfrac{x}{y}$

أوجد مركبات التنسور T^i في النظام الاحداثي $(\bar{x},\bar{y})$.

٣) بفرض $T\binom{1}{2}$ تنسور من النوع $\binom{1}{2}$ مركباته هي

$$T^1_{11}=x+y^2, T^1_{21}=x+y, T^1_{12}=xy, T^1_{22}=1, T^2_{11}=y+x^2, T^2_{12}=x-y, T^2_{21}=\frac{x}{y}, T^2_{22}=0$$

والمطلوب أوجد التنسور الناتج عن تقليص التنسور T بدليليه العلوي والسفلي الثاني .

السؤال الثالث (150 درجة)

عرف المنطوي التفاضلي الأملس ، ثم أثبت أن كرة الوحدة $S^n\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ هي منطو تفاضلي بعده n .

مع تمنياتي بالنجاح — مدرس المقرر أ.د. محسن شيحة

حمص في ٨ /٧/ ٢٠١٣

جامعة البعث	امتحان مقرر الهندسة التفاضلية .	الاسم :
كلية العلوم	السنة الرابعة (تحليل)	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	الفصل الأول ٢٠١١-٢٠١٢	الفترة :

السؤال الأول (55) درجة

ليكن S سطح الطارة المعطى بالمعادلة المتجهة :

$$r = ((a + b\sin v)\cos u, (a + b\sin v)\sin u, (b\cos v)); 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2\pi$$

والمطلوب :

١) أثبت أن السطح S سطح نظامي ، ثم أوجد معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم له في النقطة الموافقة للوسيطين $u = 0, v = \frac{\pi}{2}$.

٢) أوجد الصيغتين التربيعيتين الأولى والثانية لهذا السطح ، واستنتج أن خطوطه الاحداثية متعامدة .

٣) ادرس طبيعة نقاط السطح.

٤) أوجد مساحة سطح الطارة. .

٥) استنتج (التقوس الوسطي – التقوس الكلي – خطوط التقوس) لهذا السطح .

السؤال الثاني (45 درجة).

١) بفرض $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ نظام احداثي منحن مرتبط بالنظام الاحداثي الديكارتي (x, y, z) بالعلاقة : $x = \bar{y}; y = \bar{z}; z = \bar{x}.\bar{y}$ ، والمطلوب :

أ) أوجد التنسور (g_{ij}) في الاحداثيات المنحنية $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

ب) أثبت أن المتجهين $(i, j = 1,2,3)$ $U^j = (-\bar{x}/\bar{y}, 1, 0); V^i = (1/\bar{y}, 0, 0);$ متعامدان

ج) أوجد مركبات المتجه $V_i = g_{i\alpha} V^\alpha$ الناتج عن تخفيض الدليل i في المتجه السابق V^i .

٢) بفرض $T\binom{1}{2}$ تنسور من النوع $\binom{1}{2}$ مركباته هي :

$$T_{11}^1 = x + y^2, T_{21}^1 = x + y, T_{12}^1 = xy, T_{22}^1 = 1, T_{11}^2 = y + x^2, T_{12}^2 = x - y, T_{21}^2 = \frac{x}{y}, T_{22}^2 = 0.$$

والمطلوب: أوجد التنسور الناتج عن تقليص التنسور T بدليليه العلوي والسفلي الثاني ، وأوجد حاصل تناظره بأدلته السفلية .

د. محسن شيحة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق .

حمص في ٢٠١٢/١/ /

الأجوبة النموذجية لمقرر الهندسة التفاضلية سنة رابعة رياضيات (...)
للفصل الأول ٢٠١١-٢٠١٢.

الجواب الأول:

١) لدينا :

$$r_u = (-(a+b\sin v)\sin u, (a+b\sin v)\cos u, 0)$$

$$r_v = (b\cos v\cos u, b\cos v\sin u, -b\sin v)$$

$$r_u \times r_v = (b(a+b\sin v))(-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, -\cos v)$$

$$|r_u \times r_v| = b\cdot(a+b\sin v) \neq 0$$

وبما أن الدوال $x(u,v)$ ، $y(u,v)$ ، $z(u,v)$ دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق عدد كيفي من المرات وأن $r_u \times r_v \neq 0$ فإن السطح S هو سطح نظامي $S \in C^{\infty}$.

في النقطة $u=0, v=\frac{\pi}{2}$ نجد أن:

$$M_0 = (a+b, 0, 0) \rightarrow x(0,\tfrac{\pi}{2}) = a+b, \quad y(0,\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad z(0,\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$r_u(0,\tfrac{\pi}{2}) = (0, a+b, 0), \quad r_v(0,\tfrac{\pi}{2}) = (0, 0, -b)$$

وبالتالي فإن:

$$(r_u \times r_v)\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})} = b(a+b)(-1, 0, 0)$$

ومنه معادلة المستوي المماس هو:

$$-b(a+b)(x-(a+b)) + 0(y-0) + 0(z-0) = 0 \Rightarrow$$

$$x = a+b$$

ومعادلة المستقيم الناظم هي:

$$\frac{x-(a+b)}{-b(a+b)} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$$

٢) لدينا

$$E = (r_u)^2 = (a+b\sin v)^2, \quad F = r_u \cdot r_v = 0, \quad G = (r_v)^2 = b^2$$

وبالتالي

$$I = (a+b\sin v)^2 du^2 + b^2 dv^2$$

$r_{uu} = (-(a+b\sin v)\cos u, -(a+b\sin v)\sin u, 0)$

لدينا ،

$r_{uv} = (-b\cos v\sin u, b\cos v\cos u, 0)$

$r_{vv} = (-b\sin v\cos u, -b\sin v\sin u, -b\cos v)$

ولدينا ،

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = (-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, -\cos v)$$

ومنه

$L = r_{uu}\cdot n = (a+b\sin v)\sin v, \quad M = 0, \quad N = b$

وبالتالي ،

$II = (a+b\sin v)\sin v\, du^2 + b\, dv^2$

- بما أن $F=0$ فإن الخطوط الإحداثية متعامدة

وبما أن $LN - M^2 = b.(a+b\sin v)\sin v$ فإنه $b.(a+b\sin v) > 0$

فإن $LN - M^2 = 0 \Rightarrow \sin v = 0$

عندما

(نقطة ناقصية) $LN - M^2 > 0 \Rightarrow \sin v > 0 \Rightarrow 0 < v < \pi$

(مكافئية) $LN - M^2 = 0 \Rightarrow \sin v = 0 \Rightarrow v = 0, v = \pi$

(نقطة زائدية) $LN - M^2 < 0 \Rightarrow \sin v < 0 \Rightarrow \pi < v < 2\pi$.

2- إن سطح الفارة يعطى بالعلاقة ،

$$A = \iint_{\substack{0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le 2\pi}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} b(a+b\sin v)\, dv\right] du = 4\pi^2 a.b$$

3) بما أن $F = M = 0$ فإن

$$K_1 = \frac{L}{E} = \frac{(a+b\sin v)\sin v}{(a+b\sin v)^2} = \frac{\sin v}{(a+b\sin v)}$$

$$K_2 = \frac{N}{G} = \frac{b}{b^2} = \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow K = K_1 \cdot K_2 = \frac{\sin v}{(a+b\sin v)b}$$

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{b\sin v + a + b\sin v}{2b(a+b\sin v)}$$

وإن الخطوط الإحداثية هي خطوط التقوس .

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ انجليزي 20

$$\Gamma_{1,11} = \frac{1}{2}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2}\frac{\partial 4\bar{x}^2}{\partial \bar{x}} = 4\bar{x}$$

$$\Gamma_{2,11} = \frac{1}{2}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma^1_{11} = g^{1\alpha}\Gamma_{\alpha,11} = g^{11}\Gamma_{1,11} + g^{12} g_{2,11} = \frac{1}{4\bar{x}^2}4\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}} + 0$$

$$\Gamma^2_{11} = g^{2\alpha}\Gamma_{\alpha,11} = g^{21}\Gamma_{1,11} + g^{22}\Gamma_{2,11} = 0 + 0 = 0$$

(c

$$S_{ij} = T_{(ij)} = \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{2} T_{ij} \Rightarrow$$

$$S_{11} = \frac{1}{2}[T_{11} + T_{11}] = T_{11} = 1$$

$$S_{12} = \frac{1}{2}[T_{12} + T_{21}] = -2 + 2 = 0 = S_{21}$$

$$S_{22} = \frac{1}{2}[T_{22} + T_{22}] = 5$$

$$U_{ij} = T_{[ij]} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \text{sign}_\sigma T(ij) \Rightarrow$$

$$U_{11} = \frac{1}{2}(T_{11} - T_{11}) = 0$$

$$U_{12} = \frac{1}{2}[T_{12} - T_{21}] = \frac{1}{2}(-2 - 2) = -2$$

$$U_{21} = \frac{1}{2}[T_{21} - T_{12}] = \frac{1}{2}(2 + 2) = 2$$

$$U_{22} = \frac{1}{2}[T_{22} - T_{22}] = 0$$

انتهت الأجوبة

جامعة البعث	امتحان هندسة تفاضلية	الاسم : سمية ستوحل
كلية العلوم	سنة رابعة رياضيات (تحليل)	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	الفصل الأول ٢٠١٠-٢٠١١	الفترة : ١١- ١٣

السؤال الأول (35 درجة)

ليكن السطح S المعطى بالمعادلة المتجهة $R(u,v) = (chu\cos v , chu\sin v , u)$ مكرر

والمطلوب:

١) ما الاسم المعروف به السطح المعطى ؟ ادرس طبيعة نقاطه

٢) حدد الخطوط الإحداثية والخطوط المقاربة على السطح ؟

٣) أوجد مركبات التنسور المتري g_{ij} لهذا السطح .

٤) أوجد التقوس الكلي والتقوس الوسطي على السطح ؟

٥) أوجد طول المنحني $u = t , v = t ; 0 \le t \le \ln(1+\sqrt{2})$ على السطح S .

السؤال الثاني (45 درجة)

١) عرف الشكل الخارجي من المرتبة K ، أثبت أنه في تنسور ما إذا خفضنا دليلا ما ، ثم رفعنا نفس ذلك الدليل نحصل على نفس التنسور .

٢) بفرض أن النظام الإحداثي $(\bar{x},\bar{y})$ يرتبط بالنظام الاحداثي الديكارتي (x,y) بالعلاقة: $\bar{y} = y$, $x = (\bar{x})^2$ و $T_i = (\bar{x},1)$ مركبات تنسور من النوع $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

والمطلوب:أوجد $\Gamma^2_{11}, \Gamma^1_{11}, \Gamma_{2,11}, \Gamma_{1,11}$ ثم أوجد : $T_{1;1}$.

٣) بفرض $T_{ij} = (T_{11},T_{12},T_{21},T_{22}) = (1,-2,2,5)$ تنسورا من النوع $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ والمطلوب أوجد مركبات التنسورين $T_{(ij)}$ ، $T_{[ij]}$.

السؤال الثالث (20 درجة)

١) عرف المنطوي التفاضلي الأملس ، متجه المماس لمنطو تفاضلي M^n في نقطة P منه .

٢) عرف التطبيق المماسي $f_{*p} : T_p(M^n) \to T_q(N^k)$ ثم اذكر خواصه .

مع التمنيات بالنجاح   مدرس المقرر د. محسن شيحة

حمص في ٢٠١١/١/٣١

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الدورة التكميلية
٢٠١٠-٢٠١١
سنة رابعة – رياضيات

الاسم :
الدرجة: 100
الفترة :

السؤال الأول(40 درجة)

ليكن S سطحا معطى بالمعادلة : $r(u,v)=(u-\frac{u^3}{3}+uv^2, v-\frac{v^3}{3}+vu^2, u^2-v^2)$.

والمطلوب :

١) ادرس طبيعة نقطاط السطح

٢) أوجد التقوس الوسطي وتقوس غوص للسطح، ثم استنتج التقوسان الأساسيان للسطح.

٣) أوجد المنحنيات المقاربة ومنحنيات التقوس على هذا السطح .

السؤال الثاني (35 درجة)

١) بفرض لدينا نظام احداثي (x',y') ، مرتبط بالنظام الاحداثي (x,y) بالعلاقة :

$x'=\frac{x}{x^2+y^2}, y'=\frac{y}{x^2+y^2}$. والمطلوب :

اذا علمت أن مركبات التنسور T' في النظام الاحداثي (x,y) هي : $T^1=xy, T^2=\frac{x}{y}$

أوجد مركبات التنسور T' في النظام الاحداثي (x',y') .

٢) بفرض $T\binom{1}{2}$ تنسور من النوع $\binom{1}{2}$ مركباته هي

$$T_{11}^1=x+y^2, T_{21}^1=x+y, T_{12}^1=xy, T_{22}^1=1, T_{11}^2=y+x^2, T_{12}^2=x-y, T_{21}^2=\frac{x}{y}, T_{22}^2=0$$

والمطلوب أوجد التنسور الناتج عن تقليص التنسور T بدليليه العلوي والسفلي الثاني .

السؤال الثالث :(25 درجة)

١) عرف المنطوي التفاضلي – الدالة الملساء عى منطو تفاضلي .

٢) عرف المتجه المماسي لمنطو تفاضلي في نقطه ما منه ، ثم اذكر خواصه .

مع تمنياتي بالتوفيق
د. محسن شيحة

حمص في /٩/ ٢٠١١

التكاملية ٢٠١٠ - ٢٠١١

الجواب الأول (40)

1) $r_u = (1-u^2+v^2, 2uv, 2u)$ 2

$r_v = (2uv, 1-v^2+u^2, -2v)$ 2

$E = G = (1+u^2+v^2)^2 , \ F = 0$ 2

$r_{uu} = (-2u, 2v, 2),$ 2

$r_{vv} = (2u, -2v, -2)$ 2

$r_{uv} = (2v, 2u, 0)$ 2

$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = (1+u^2+v^2)^{-1}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2)$ 2

$L = 2$, $M = 0$, $N = -2$ 2

$LN - M^2 = -4 < 0$ نقاطه زائدية. 2

$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}$ 2

$H = \frac{GL+EN-2FM}{2(EG-F^2)} = 0 \Rightarrow K_1 = -K_2 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$ 2 2

وباعتبار $F = 0$ و $M = 0$ وبالتالي فإن الخطوط الإحداثية متعامدة على السطح ومنه فإن الخطوط الإحداثية هي خطوط تقوس. 4

لإيجاد الخطوط المقاربة على السطح نكتب $II = 0$ ومنه

$II = 0 \Rightarrow L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \Rightarrow du^2 - dv^2 = 0$

$\Rightarrow (du - dv)(du + dv) = 0 \Rightarrow u+v = const , \ u-v = const$ 4

الجواب الثاني (35) لدينا:

$\bar{T}^1 = T^1 \frac{\partial x'}{\partial x} + T^2 \frac{\partial x'}{\partial y}$

$= x \cdot y \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{y} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy^3 - yx^3 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\bar{T}^2 = T^1 \frac{\partial y'}{\partial x} + T^2 \frac{\partial y'}{\partial y} = x \cdot y \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{y} \cdot y \left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{x^3 + xy^2 - 2x^2y^2}{y(x^2+y^2)^2}$$

$$B(j) = T_j{}^i{}_i \Rightarrow B_1 = T_{11}^1 + T_{12}^2 = x + y^2 + x - y = x - y + y^2$$

$$B_2 = T_{21}^1 + T_{22}^2 = x + y + 0 = x + y \Rightarrow B(x - y + y^2 ; x + y)$$

الجواب الثاني (أ) المنطوي التفاضلي الأملس هو فضاء طبولوجي فصول يحقق ما يلي $E_{(U,y)}^{i}$

1) نوجد مجموعة من الخرائط $A = \{(U_\alpha, x_\alpha), \alpha \in I\}$ بحيث تحقق:

أ) من أجل $\alpha \in I$ فإن الصورة $x_\alpha(U_\alpha)$ مفتوحة من $\mathbb{R}^n$.

ب) $M^n = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

2) من أجل أي خريطتين (U,x) ، (V,y) بحيث $U \cap V \neq \phi$ فإن التطبيق

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V)$$

تطبيقاً أملس $(x^1, \dots, x^n) \longrightarrow (y^1, \dots, y^n)$

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$$

3) الأطلس A أعظمي من M^n (من أجل أي خريطة (W, z) ~~لكل~~ متسقة مع A فإنها تنتمي الى A .

(ج) الدالة الملساء على منطوي تفاضلي هي دالة ملساء في كل نقطة من تعاطها ونقول عن الدالة f انها ملساء في نقطة p من M^n اذا وجدت خارطة (U,x) بحيث تحتوي $p \in U$ وتكون الدالة $\varphi = f \circ x^{-1}$ في الجوار $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ تقبل مشتقات جزئية مستمرة من جميع الرتب.

(د) المتجه المماس لمنطوي أملس M^n في نقطة p فهو دالة حقيقية X_p :
$X_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث تقابل كل دالة ملساء $f \in C^\infty(p)$ بالعدد $X_p f$ ويحقق الخواص:

1) $X_p(f + g) = X_p f + X_p g$

2) $X_p(\alpha f) = \alpha X_p f$

3) $X_p(f \cdot g) = X_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p g$

$\alpha \in \mathbb{R}, \quad f, g \in C^\infty(p)$

وزارة التعليم العالي .
جامعة ...
كلية العلوم – قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التفاضلية
السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول (٢٠٠٩-٢٠١٠)

الاسم :
الدرجة : 80
المدة :

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

السؤال الأول :(35 درجة)

ليكن السطح اللولبي S المعرف بالمعادلة $r(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au)$ والمطلوب :

١) أوجد منحنيات التقوس والمنحنيات المقاربة على السطح S .

٢) أوجد التقوس الكلي والتقوس الوسطي للسطح S

٣) أوجد التقوس الجيوديزي للمنحني $v = const$ الواقع على السطح S.

٤) أوجد الزاوية بين المنحني الاحداثي u والمنحني $v = shu$ على السطح S.

السؤال الثاني :(30 درجة)

١) بفرض T_i مركبات تنسور من النوع $\binom{0}{1}$ أثبت أن $S_{ij} = T_i T_j - T_j T_i$ هي مركبات تنسور متناظر تخالفيا من النوع $\binom{0}{2}$.

٢) بفرض
$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} x^2-1 & 1 & 0 \\ 1 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 46/9 \end{pmatrix}$$
حيث $(x^2-1)y^2 \neq 1$ والمطلوب أثبت أن (g_{ij}) تمثل مركبات تنسور متري على R^3 ، ثم احسب طول المنحني المعطى بالمعادلات $(x = 2t-1, y = 2t^2, z = t^3), 0 \le t \le 1$ بدلالة التنسور g_{ij} .وأوجد مركبة كريستوفل $\Gamma_{1,21}$.

٣) اكتب صيغة التفاضل موافق التغير $\nabla_k T\binom{p}{q}$ للتنسور من النوع $\binom{p}{q}$.

السؤال الثالث :(15 درجة)

١) عرف المنطوي التفاضلي – المتجه المماس لمنطوي تفاضلي في نقطة ما منه .

٢) بفرض الدالة الحقيقية $f : S^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة على كرة الوحدة S^2 بالشكل : $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ ولتكن $p(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ نقطة ما من S^2 ولتكن (V, Υ) خارطة محلية على النصف الأيمن من كرة الوحدة S^2 أوجد المتجهات
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p (f) = \frac{\partial (f \circ \Upsilon^{-1})}{\partial x}(p) \quad ، \quad \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p (f) = \frac{\partial (f \circ \Upsilon^{-1})}{\partial z}(p)$$

مع تمنياتي بالتوفيق
مدرس المقرر د. محسن شيحة
حمص في ١/ ١/ ٢٠١٠

نموذج حل لمادة هندسة تفاضلية مشترك الرابع رياضيات (شعبة التكنيك) للفصل الاول ٢٠٠٩ - ٢٠١٠

جواب السؤال الاول

25

$r=(v\cos u,\ v\sin u,\ au)$

$r_u=(-v\sin u,\ v\cos u,\ a),\quad r_v=(\cos u,\sin u,0)$

$r_u\times r_v=(-a\sin u,\ a\cos u,\ -v)\Rightarrow |r_u\times r_v|=\sqrt{a^2+v^2}\neq 0\Rightarrow$ سطح نظامي. والدوال في r من الصنف C^∞ لها مشتقات تفاضلية عبر كثير من المرات.

$E=r_u^2=a^2+v^2,\quad F=r_u\cdot r_v=0,\quad G=(r_v)^2=1$

$r_{uu}=(-v\cos u,\ -v\sin u,\ 0),\quad L=r_{uu}\cdot n=0$

$r_{uv}=(-\sin u,\ \cos u,\ 0)\Rightarrow M=r_{uv}\cdot n=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}$

$r_{vv}=(0,0,0)\Rightarrow N=r_{vv}\cdot n=0$

$I=r_u^2du^2+2r_u\cdot r_v\,du\,dv+(r_v)^2dv^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=$
$(a^2+v^2)du^2+dv^2$

$II=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+v^2}}du\,dv$

- خطوط التقوس معادلتها

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ a^2+v^2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}} & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$\dfrac{a(a^2+v^2)}{\sqrt{a^2+v^2}}du^2-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}dv^2=0\Rightarrow du^2=\dfrac{dv^2}{a^2+v^2}$

$u=\pm\frac{1}{a}\cdots\frac{v}{a}+c$

$u=\pm\,\mathrm{arcsh}\,v+c=\pm\ln(a+\sqrt{a^2+v^2})+c,\quad c=\text{const}$ (مشطوب)

- المنحنيات التقاربية من $II=0\Rightarrow du\,dv=0\Rightarrow u=c_1,\ v=c_2$
المنحنيات الاحداثية هي الخطوط التقاربية.

$H=\dfrac{1}{2}\dfrac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}=0,\quad K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{-\frac{a^2}{a^2+v^2}}{a^2+v^2}$
$=\dfrac{-a^2}{(a^2+v^2)^2}$

Scanned by CamScanner

$$\Gamma_{1,21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}\right) = 0$$

$$T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \frac{\partial T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}}{\partial x^k} + T^{\alpha i_2 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}\Gamma^{i_1}_{\alpha k} + \cdots + T^{i_1 \cdots \alpha}_{j_1 \cdots j_q}\Gamma^{i_p}_{\alpha k}$$

$$- T^{i_1 \cdots i_p}_{\alpha j_2 \cdots j_q}\Gamma^{\alpha}_{j_1 k} - \cdots - T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_{q-1}\alpha}\Gamma^{\alpha}_{j_q k}$$

(١٥) الطلب الثالث

المتنوع التفاضلي، هو متنوع تبولوجي، متنوع تام بالفصل معرف عليه A أطلس

$A = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ تحقق

$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M^n$ (أ

ب) تا ... فارطة

(U, X)، $(V, Y) \in A$ مع

$Y \circ Y^{-1} : X(U \cap V) \to Y(U \cap V)$ (المتحصنة) هو تطبيق قابل للمفاضلة تابل

ج) ... A أعظمي.

- ... المتجه المماس لمنحنى تفاضلي ... صورة ...

$X_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$

$f \to X_p f$, $f \in C^\infty(p)$. تحقق

$X_p(f+g) = X_p f + X_p g$

$X_p(\alpha f) = \alpha X_p f$

$X_p(f \cdot g) = g X_p f + f X_p g$

ج) ليكن $X(P) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right)_p f = \left(\frac{\partial f \circ Y^{-1}}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\partial f\left(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z\right)}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\partial (x+1-x^2-z^2)}{\partial x} = 0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right)_p f = \frac{\partial (f \circ Y^{-1})}{\partial z}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2z)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

... $T_p(S^2)$ ...

Scanned by CamScanner

$$K_g = K(V, n, T) = \frac{(n, r', r'')}{|r'|^3} = '$$

$V(t=u) = (c\cos t, c\sin t, at)$, $c = const$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t, & -c \\ -c\sin t & c\cos t & a \\ -c\cos t & -c\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{a(c^2-c^3)(\sin^2 t-\cos^2 t)}{(a^2+c^2)^2}$$

$$S = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \int_0^1 \left(\int_0^a \sqrt{a^2+v^2}\,dv \right) du = \ldots$$

$$\left. \frac{v}{2}\sqrt{v^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|v+\sqrt{v^2+a^2}| \right]_0^a du = \frac{a^2}{2}\sqrt{2} + \frac{a^2}{2}\ln|a+\sqrt{2}a| - \frac{a^2}{2}\ln a$$

غير مطلوب

(٢) ان الزاوية بين المنحنى u والمنحنى v=sh u تعطى بالعلاقة

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{dr}{dt}, r_u\right) = \frac{(r_u\, du/dt + r_v\, dv/dt)\, r_u}{|r_u\, du/dt + r_v\, dv/dt| \cdot |r_u|} = \frac{E\, du/dt + F\, dv/dt}{\sqrt{I}\cdot\sqrt{E}} = \sqrt{\frac{E}{I}}$$

$$I = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

ونجد هنا ان على طول المنحنى v=sh u يكون u=t, v=sh t ومنه

$E + ch^2 t$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{a^2+sh^2 t}{a^2+sh^2 t+ch^2 t}} = \sqrt{\frac{a^2+sh^2 t}{a^2+ch^2 t}}$$

(3d) السؤال الثالث (١)

$$\bar{T}_{ij} - \bar{T}_j \bar{T}_i = T_r \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \cdot T_s \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} - T_s \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \cdot T_r \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}$$

$$T_r T_s \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} - T_s T_r \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} = (T_r T_s - T_s T_r)\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}$$

ومنه

$S_{ij} + S_{ji} = T_iT_j - T_jT_i + T_jT_i - T_iT_j = 0$

اذا كان ممتد

$$\bar{S}_{ij} = S_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}$$

$S_{ij} = -S_{ji}$ تنسور ملتوي من النوع (٠،٢) من ترتيب العناصر $\to S_{ij}$

(٣) لدينا $(g_{ij}) \ni C^2$ كما انه ملاحظ من العناصر انها غير متناظرة

$g_{ij} = g_{ji}$ متناظرة، ولدينا

$$|g_{ij}| = \det(g_{ij}) = \frac{64}{9}\begin{vmatrix} x^1-1 & 1 \\ 1 & y^1 \end{vmatrix} = \frac{64}{9}[(x^1-1)y^1-1] \neq 0$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left[\frac{dx^i}{dt}\right]^T (g_{ij}) \left(\frac{dx^j}{dt}\right) = [2\ \ 4t\ \ 3t^2] \begin{pmatrix} (2t-1)^2-1 & 1 & 0 \\ 1 & (2t^3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4t^2 \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$= 64t^6 + 64t^4 + 16t^2 = (8t^3+4t)^2 \Rightarrow S(t) = \int (8t^3+4t)\,dt = $$

$$\Gamma_{2,21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}\right) = 0$$

$$T^{i_1 - i_p}_{j_1 - j_q ; k} = \frac{\partial T^{i_1 - i_p}_{j_1 - j_q}}{\partial x^k} + T^{\alpha i_2 - - i_p}_{j_1 - - j_q}\Gamma^{i_1}_{\alpha k} + - - + T^{i_1 - - i_{p-1}\alpha}_{j_1 - - j_q}\Gamma^{i_p}_{\alpha k}$$

$$- T^{i_1 - i_p}_{\alpha j_2 - j_q}\Gamma^{\alpha}_{j_1 k} - - - - T^{i_1 - i_p}_{j_1 - - j_{q-1}\alpha}\Gamma^{\alpha}_{j_q k}$$

الجواب الثالث (15)

المنطوي التفاضلي M، هو منطوي تبولوجي، منطوي قابل للفصل معرف عليه F طلس

تحقق $A = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ $\alpha \in I$

أ) $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M^n$

ب) أي اثنين هو فارضين (U, X) ، $(V, Y) \in A$ فإن

التطبيق $Y \circ X^{-1} : X(U \cap V) \to Y(U \cap V)$ هو تطبيق قابل للمفاضلة تقابل

ج) الاطلس A أعظمي.

- المتجه المماس لمنطوي تفاضلي نقطة ما هو دالة حقيقية

$X_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longrightarrow X_p f$ ، $f \in C^\infty(p)$. تحقق

$X_p(f+g) = X_p f + X_p g$

$X_p(\alpha f) = \alpha X_p f$

$X_p(f \cdot g) = g X_p f + f X_p g$

ج) لدينا $X(p) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p f = \left(\frac{\partial f \circ Y^{-1}}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\partial f(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z)}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\partial(x^2+1-x^2-z^2)}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p f = \frac{\partial(f \circ Y^{-1})}{\partial z}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2z)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

الابعاد للفضاء $T_p(S^2)$ هو 2 ومتجهات القاعدة هي ...